Dr. P. Thurnheer ETH Zürich Frühling 2004

2. Vordiplom
Mathematik III: Analysis
(D-ERDW)

Es wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben lösen in den 90 Minuten, welche für diesen Prüfungsteil vorgesehen sind.

1. (8 Punkte)
Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x + y^2 - \frac{x}{y}$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten von f, sowie die Richtungsableitung im Punkt $P(1, \frac{1}{2})$ in Richtung $(1, 1)$.

b) In welcher Richtung ist die Richtungsableitung im Punkt $P(1, \frac{1}{2})$ minimal? Wie gross ist dieses Minimum?

c) Bestimmen Sie einen Tangentialvektor an die Niveaulinie von f im Punkt $P(1, \frac{1}{2})$.

d) Bestimmen Sie den kritischen Punkt der Funktion f, sowie die Hessematrix in diesem Punkt. Geben Sie die Eigenwerte dieser Matrix an. Von welcher Art ist der kritische Punkt?

Bitte wenden!

2. (7 Punkte)
Wir betrachten die Funktionen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto f(u, v) = \begin{pmatrix} v \ln u \\ v \\ uv \end{pmatrix}$$

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto g(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \ln z - x \\ \ln z - \ln y \end{pmatrix}$$

a) Die Funktion f stellt die Parametrisierung einer Fläche im $\mathbb{R}^3$ dar. Geben Sie eine Koordinatengleichung der Tangentialebene an diese Fläche im Punkt $f(1, 2)$.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Linearisierungsformel eine erste Näherung für den Wert von $f(1.01, 1.98)$.

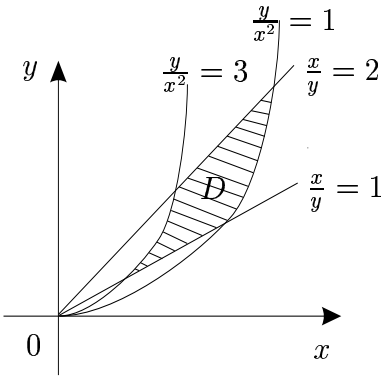
c) Bestimmen Sie für die Funktion

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (u, v) \mapsto h(u, v) = g(f(u, v))$$

die Ableitung $Dh(u, v)$ direkt und mit der Kettenregel.

3. (6 Punkte)
Berechnen Sie die Fläche $F = \iint_D 1 dx dy$ des Gebietes D, indem Sie folgende Variablentransformation vornehmen:

$$u = \frac{y}{x^2}, \; v = \frac{y}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{v}{u}, \; y = \frac{v^2}{u}$$

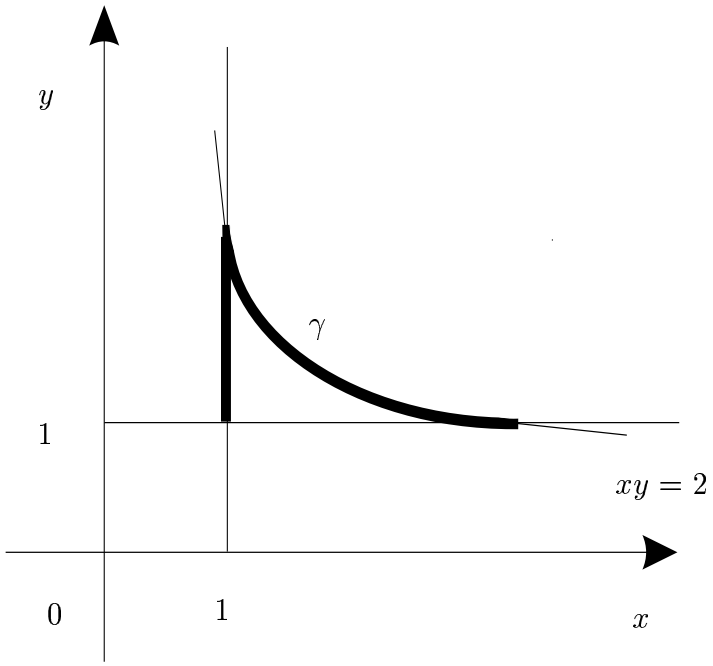


Siehe nächstes Blatt!

4. (11 Punkte)
Wir betrachten die Vektorfelder

$$F_1(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 y \\ -x^3 \end{pmatrix}$$

$$F_2(x,y) = \begin{pmatrix} y(\ln x + 1) \\ x \ln x \end{pmatrix}$$



a) Sind die Vektorfelder wirbelfrei? (Begründen Sie Ihre Antwort.) Sind die Vektorfelder Potentialfelder? Geben Sie wenn ja eine Potentialfunktion, wenn nein eine Begründung an.

b) Bestimmen Sie die Arbeit der beiden Vektorfelder längs des Weges γ. Überprüfen Sie Ihre Antwort für F_1, indem Sie γ geeignet zu einem geschlossenen Weg ergänzen und den Satz von Stokes anwenden.

5. (4 Punkte)
Geben Sie ein Vektorfeld an, für welches der Fluss durch die Einheitskugel mit Zentrum $M = (0,0,1)$ gleich 4 ist. Begründen Sie Ihre Antwort.